ÉQUIPE ACADEMIQUE DE MATHÉMATIQUES

Academy

MAGAZINE DE MATHÉMATIQUES

RÉSUMÉ DU COURS

SCIENCES EXPÉRIMENTALES

WWW.TAKIACADEMY.COM

ÉQUIPE ACADEMIQUE DE MATHÉMATIQUES

MAGAZINE DE MATHÉMATIQUES

RÉSUMÉ DU COURS

SCIENCES EXPÉRIMENTALES

Dérivabilité

Dérivabilité

$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ tangente.

$T_a \parallel \Delta : y = \alpha x + \beta \Rightarrow f'(a) = \alpha$

$T_a \perp \Delta : y = \alpha x + \beta \Rightarrow f'(a) \times \alpha = -1$

Q: Etudier la dérivabilité de f en x_0

R: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ Non dér

$f'(a) = \begin{cases} 0 \\ \oplus \\ \ominus \end{cases}$ dér

$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$

Approximation affine

$f(a+h) \simeq f(a) + h f'(a)$

h voisin de zéro

Q: Donner une valeur approchée de $f(1{,}999) = f(2 - 0{,}001)$ (h)

$\simeq f(2) + (-0{,}001) \times f'(2)$

Sens de variation

si $\forall x \in I$

$f'(x) = \begin{cases} + & f \nearrow \\ - & f \searrow \\ 0 & f \text{ est constante} \end{cases}$

Dérivées successives

f' : dérivée première

$f'' = f^{(2)}$

$f''' = f^{(3)}$

Exp $f(x) = x^4 - x^2 + \dots$

$f'(x) = 4x^3 - 2x$

$f''(x) = 12x^2 - 2$

$f^{(3)}(x) = 24x$

Dérivée de $f \circ g$

$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$

$h(x) = \cos(3x^2+1)$

$h'(x) = 6x \times (-\sin(3x^2+1))$

$= -6x \sin(3x^2+1)$

Q: Mq $f \circ g$ est dérivable sur I

R:
- g est dérivable sur I.
- f est dérivable sur J.
- $g(I) \subseteq J$ ($g(x) \in J$)

1) $(UV)' = U'V + V'U$

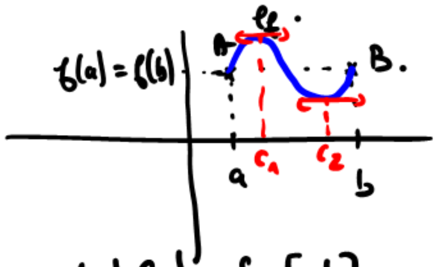
2) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$

3°) $(U^n)' = nU'U^{n-1}$

4) $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$

5°) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

Théorème de Rolle (T.R)

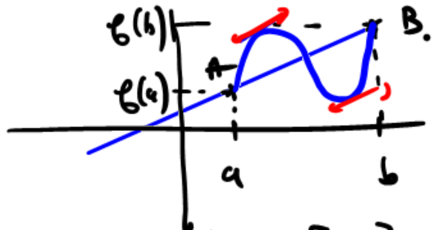


- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$
- $f(a) = f(b)$

alors il existe un réel c dans $]a,b[$ telque $f'(c) = 0$

Théorème des accroissements finis

Théorème des accroissements finis (TAF)



- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$

alors il existe un réel c de $]a,b[$ telque

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Q: Mq $f'(x) = 3$ admet une solution α dans $]a,b[$

R
- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$.
- $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 3$

Inegalité des accroissements finis (IAF)

- f est continue sur $[a,b]$
- f est dérivable sur $]a,b[$.
- il existe deux réels m et M telque :

$m \leq f'(x) \leq M \quad \forall x \in]a,b[$

alors

$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

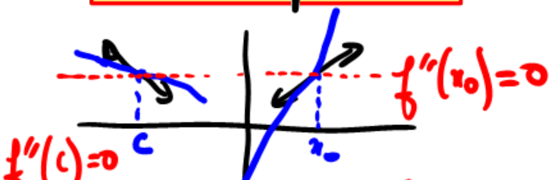
- f est dérivable sur I
- $\forall x \in I ; |f'(x)| \leq k$.

alors $\forall a, b \in I$

$|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$

(Importante dans les suites Réels)

point d'inflexion



x		c	
$f''(x)$	+	0	−
	T/Cb		Cb/T

x		x_0	
$f''(x)$	−	0	+
	T/Cb		Cb/T

Fonction Réciproque

fonction réciproque

Approche

$f(x) = 4x + 2$

$x \xrightarrow{\times 4} 4x \xrightarrow{+2} 4x+2$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

$x \xrightarrow{-2} x-2 \xrightarrow{:4} \frac{x-2}{4}$

$f(2) = 10 \longrightarrow f^{-1}(10) = 2$

$f(-3) = -10 \longrightarrow f^{-1}(-10) = -3$

$f(5) = 22 \longrightarrow f^{-1}(22) = 5$

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

$f \circ f^{-1}(10) = f(2) = 10$

$f \circ f^{-1}(22) = f(5) = 22$

$f^{-1} \circ f(2) = f^{-1}(10) = 2$

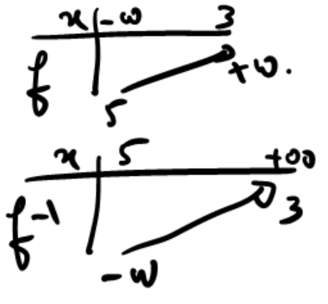
$$f^{-1} \circ f(x) = f \circ f^{-1}(x) = x$$

bijection : si f est strictement monotone sur I.
alors f realise une bijection de I sur J.

Q : Mq f realise une bijection de I sur un interval que l'on precisera.

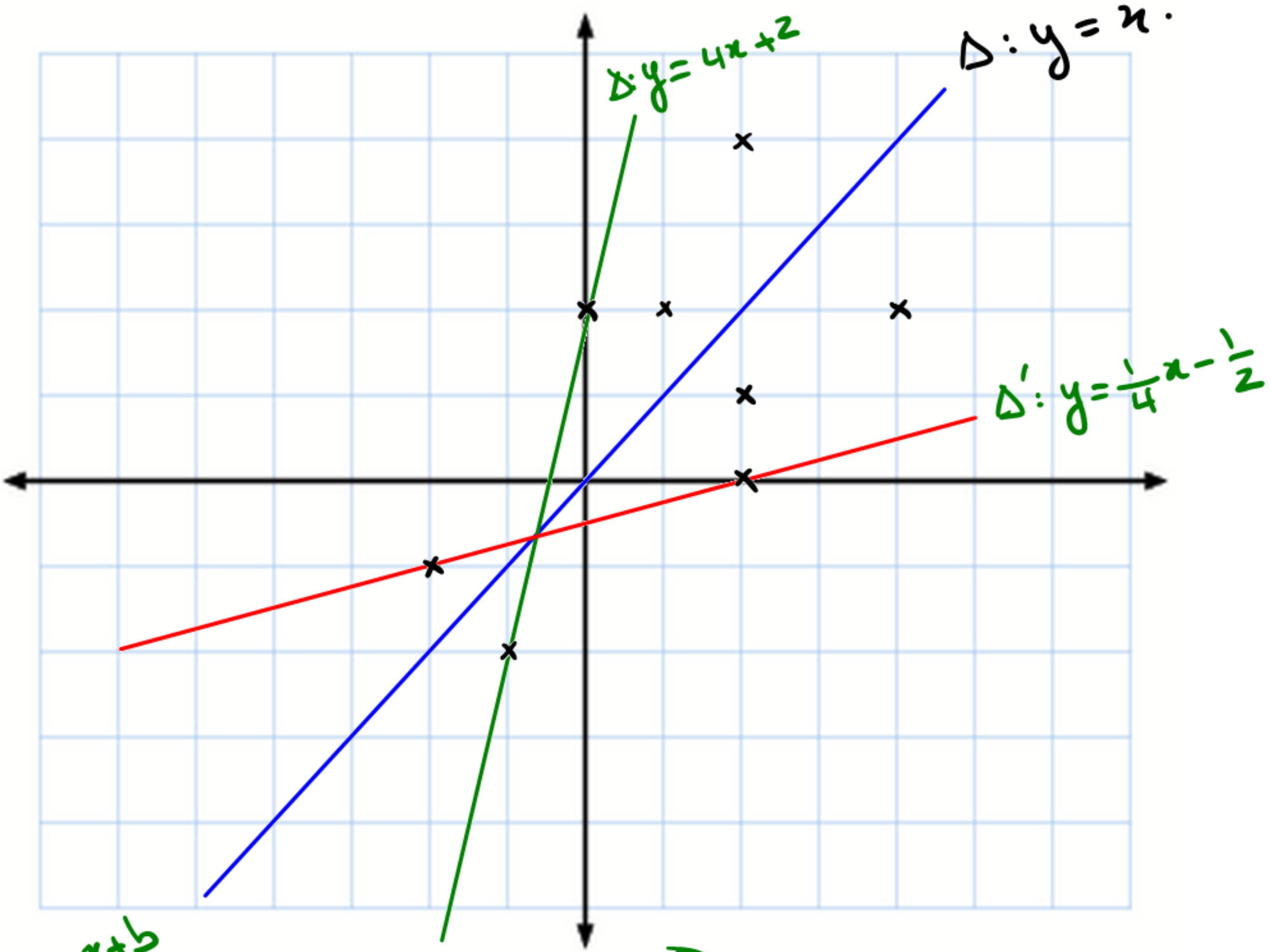
R : f est strictement monotone sur I donc elle réalise une bijection de I sur $f(I) = J$ (car f est continue sur I)

$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f^{-1} \text{ " sur } f(I) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ est stri monotone sur } I \\ f^{-1} \text{ " " sur } f(I) \end{cases}$



Construction de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$

$$\mathcal{C}_{f^{-1}} = S_{\Delta}(\mathcal{C}_f) \quad \text{avec} \quad \Delta : y = x.$$



$\Delta : y = ax + b \longrightarrow \Delta' : y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}.$

$$f(x_0) = y_0 \iff f^{-1}(y_0) = x_0$$

$f'(x_0) = a$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{a} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Géométrie

Dans

L'espace

Géometrie Dans l'espace.

Vecteurs

* $A(2,3,-1)$; $B(-1,-3,1)$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}(-1)-2\\(-3)-3\\1-(-1)\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-6\\2\end{pmatrix}$

* Vecteurs Colinéaire

Q: Mq $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\-10\\-15\end{pmatrix}$ sont colinéaires

R: $\vec{v}=-5\vec{u}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont Colinéaires

* Vecteurs non-colinéaires

Q: Mq $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ ne sont pas Colinéaires

R: $\begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix} = 1\times1-(-1)\times2 = 1+2 = 3 \neq 0$

$\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix} = ad-bc$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Academy
- www.takiacademy.com -

Autrement.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & -1\\3 & 2\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$\wedge$ ↓ vectoriel.

$$= \vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}.$$

donc $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix} \neq \vec{0}$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

MODE 8 1 1 1 = 2
= 3 = AC SHIFT 5 1
2 1 (−) 1 = 1 = 2
= AC SHIFT 5 3 SHIFT 5
4 = ▶ ▶

Q : Mq A, B et C ne sont pas alignés
(determinent un plan.)

R : il faut montrer que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

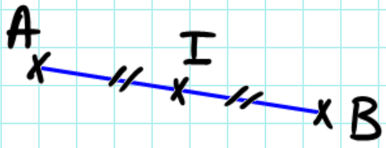
Produit scalaire.

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

Academy
- www.takiacademy.com -

Dans R.O.N $\Rightarrow$ $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$

Milieu

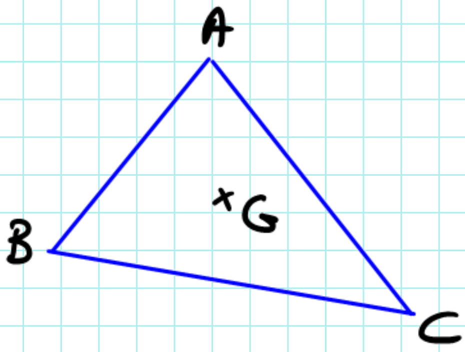


$A(x_A, y_A, z_A)$

$B(x_B, y_B, z_B)$

$$I = A*B \iff I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

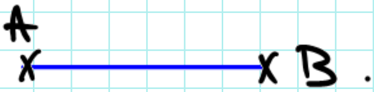
Centre de gravité



G le Centre de gravité du triangle ABC.

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} ; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

Distance.



$A(x_A, y_A, z_A)$

$B(x_B, y_B, z_B)$

- $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

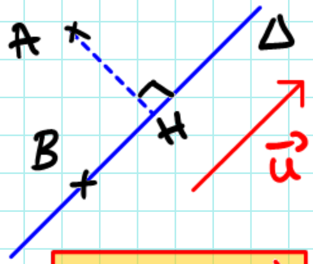
- $\vec{AB}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Academy
- www.takiacademy.com -

Exemple : $A(1,2,4)$ $B(-1,2,3)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \sqrt{2^2+0^2+1^2} = \boxed{\sqrt{5}}$

Dinstance d'un point et d'une droite.



$$d(A,\Delta) = AH = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

$\Delta(B,\vec{u})$

Exemple. $\Delta\left(B(1,2,-1);\ \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$

et $A(1,-2,-2)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} \wedge \vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}4&1\\1&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&-1\\1&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&-1\\4&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$; $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\begin{pmatrix}7\\-1\\4\end{pmatrix}}$

Donc $d(A,\Delta) = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\sqrt{7^2+1^2+4^2}}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$

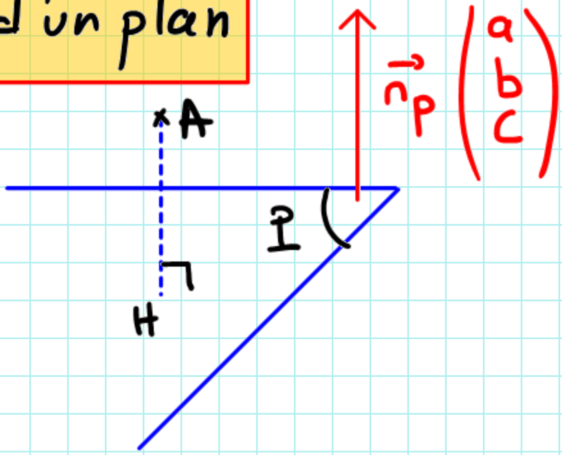
$= \boxed{\sqrt{11}}$

Academy
- www.takiacademy.com -

Distance d'un point et d'un plan

$A(x_A, y_A, z_A)$

$P : ax + by + cz + d = 0$



$$d(A, P) = \frac{|P_A|}{\|\vec{n}_P\|}$$ avec $P_A = ax_A + by_A + cz_A + d$

et $\vec{n}_P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Exemple :

$A(1, -2, 1)$ et $P : x - 3y + 2z - 1 = 0$

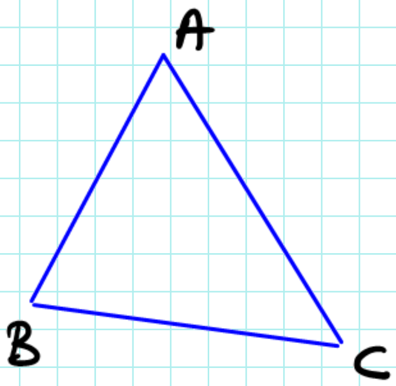
$$d(A, P) = \frac{|1 - 3\times(-2) + 2\times 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{14}}{7}$$

athogonalité

* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$.

Aires

- $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.



Academy
www.takiacademy.com

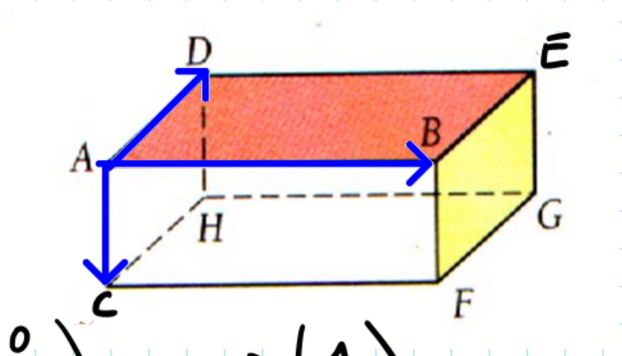
Exemple : $A(1,2,-1)$, $B(1,-1,2)$ et $C(1,1,2)$

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$

or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$; donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix}$

Donc $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{12^2+0^2+0^2} = \boxed{6}$

Volume de parallélépipède



$$V(ABEDCFGH) = \left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right|$$

Exemple : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$V(ABCDEFGH) = \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|12 \times 1 + 0 \times 1 + 0 \times (-1)\right|$$

$$= |12| = \boxed{12}$$

Academy
- www.takiacademy.com -

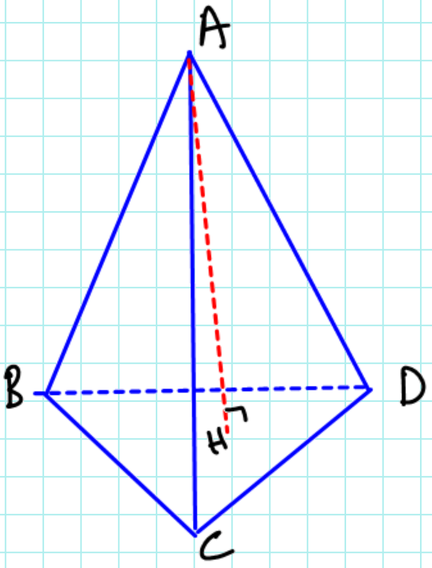
Volume et hauteur d'un tétraèdre

$$\mathcal{V}(ABCD) = \boxed{\frac{1}{6}\left|\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right)\cdot\vec{AD}\right|}$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}\left|\det\left(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}\right)\right|}$$

$$= \boxed{\frac{B\times h}{3}}$$

$$= \boxed{\frac{\mathcal{A}(BCD)\times AH}{3}}$$



d'où

$$\boxed{AH = \frac{3\,\mathcal{V}(ABCD)}{\mathcal{A}(BCD)} = d\left(A,(BCD)\right)}$$

* Déterminant de 3 vecteurs.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\ \vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\ \text{et}\ \vec{w}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right) = \begin{vmatrix} +1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ +3 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$= +1\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}$$

$$= -1 - 4 - 9 = \boxed{-14}$$

MODE 6 1 1 1 = 1
= 1 = 2 = 1 = (−)
2 = 3 = (−) 1 = 1
= AC SHIFT 4 7 SHIFT 4
3 =

- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires
- Si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
- A, B, C et D sont coplanaires **ssi**

$$d(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0$$

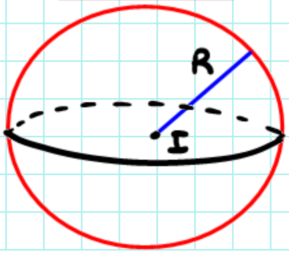
Sphère

$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \underbrace{-d + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}_{\Delta}.$$

- Si $\Delta < 0 \Rightarrow \Gamma = \emptyset$
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow \Gamma = \left\{ I\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) \right\}.$
- Si $\Delta > 0 \Rightarrow \Gamma = S\left(I\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right); R = \sqrt{\Delta}\right)$

S(I, R)

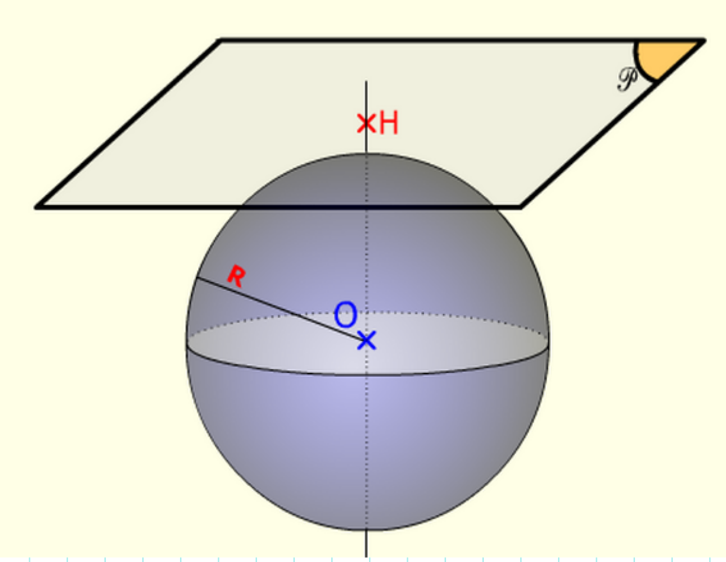


Position relative d'un plan et d'une sphère

H est le projeté orthogonal de O sur P.

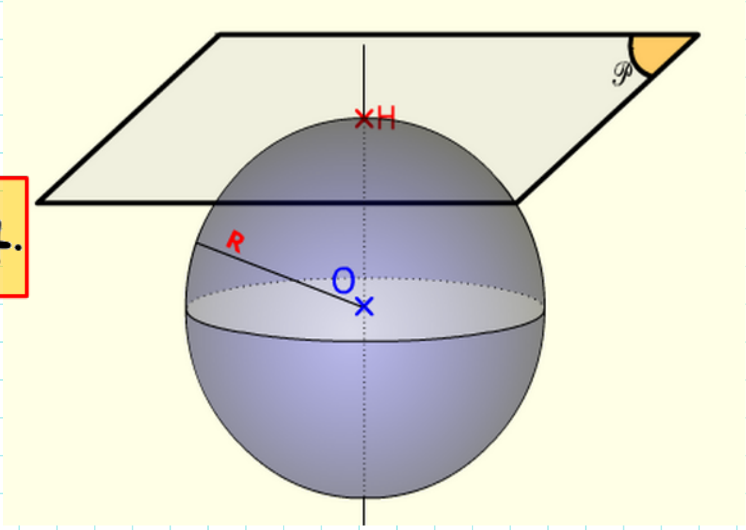
$d(O,P) = OH > R$

$\Rightarrow$ $S \cap P = \emptyset$



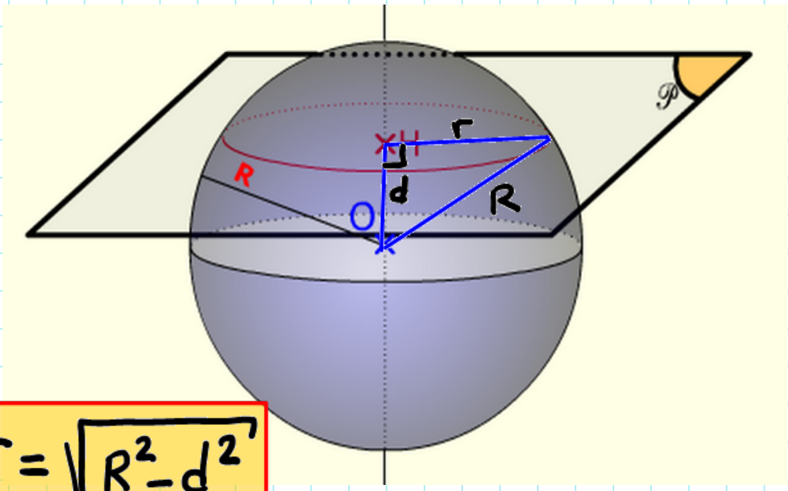
- $d(O,P) = OH = R$

S et P sont tangent en H.



- $d(O,P) = OH < R$

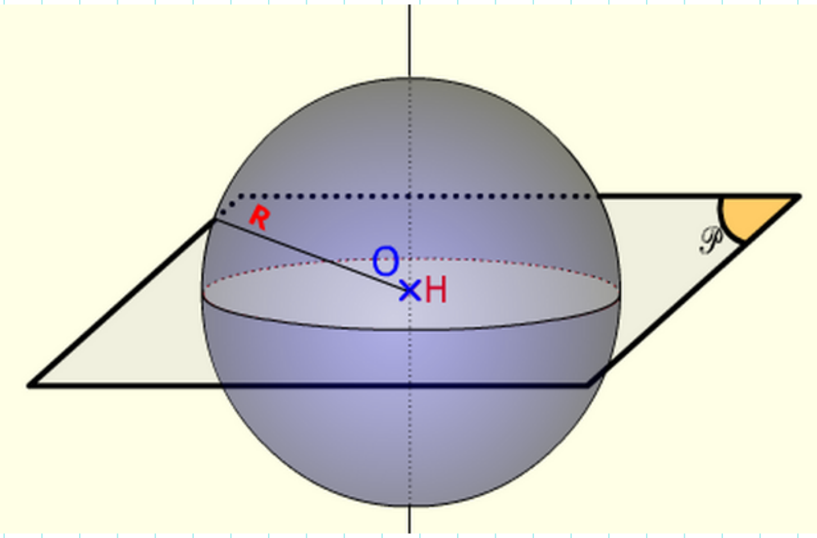
S et P sont sécants suivant un cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$



www.takiacademy.com

- $d(\Omega, \mathcal{P}) = 0$.

alors S et $\mathcal{P}$ sont sécants suivant un cercle de centre Ω et de rayon R



Exemple. $S : x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$

Q₁: Mq S est la sphère de centre I et de rayon R que l'on précisera.

R₁: $S : (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2 = -1+1^2+2^2+1^2$

$= 5 > 0$

Donc S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$

Q₂: Soit $\mathcal{P} : x+y-z-5=0$

Mq $\mathcal{P} \cap S$ est un cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre H et le rayon r.

R_2 :

$$d(I,P) = \frac{|P_I|}{\|\vec{n}_P\|} \quad \text{avec } P_I = 1+2-1-5 = \mathbf{-3}$$

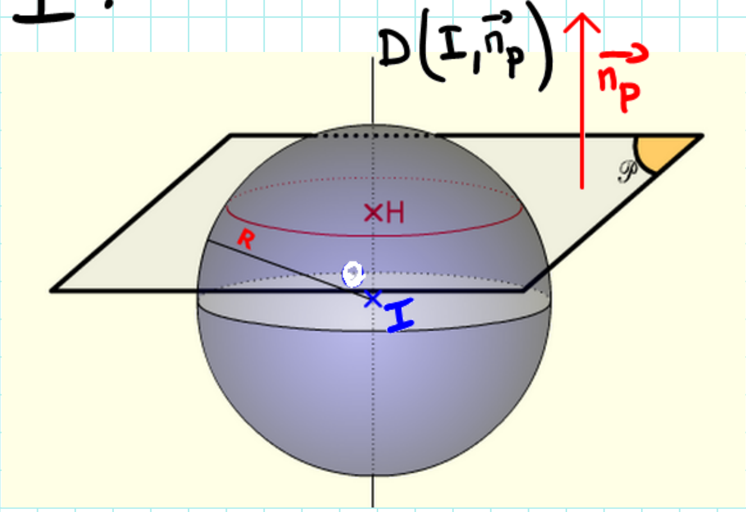
et $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ainsi $d(I,P) = \dfrac{|-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \boxed{\sqrt{3}} < \sqrt{5}$

Donc $P \cap S$ est un cercle $\mathcal{C}$ de rayon.

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5-3} = \boxed{\sqrt{2}}$$

et de centre $H(x,y,z)$, le projeté orthogonal de I sur P.



Donc $\boxed{H \in P \cap D(I, \vec{n}_P)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-z-5=0 \\ x = 1+\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = 1-\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow 1+\alpha+2+\alpha-1+\alpha-5 = 0$

$\Rightarrow 3\alpha = 3 \iff \boxed{\alpha = 1} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{H(2,3,0)}$

Primitive
Intégrale

Academy
- www.takiacademy.com -

Primitives

Primitive $\longleftrightarrow$ Dérivée

$$F \longleftrightarrow f \longleftrightarrow f' \longleftrightarrow f''$$

$$c^{te}\,x \longleftrightarrow c^{te}$$

$$3x \longleftrightarrow 3$$

$$-\sqrt{2}\,x \longleftrightarrow -\sqrt{2}$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \longleftrightarrow x^n$$

$$\frac{x^2}{2} \longleftrightarrow x$$

$$\frac{x^4}{4} \longleftrightarrow x^3$$

$$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \longleftrightarrow \frac{1}{x^n}$$

$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$-\frac{1}{2x^2} \longleftrightarrow \frac{1}{x^3}$$

$$-\frac{1}{6x^6} \longleftrightarrow \frac{1}{x^7}$$

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x} \longleftrightarrow \sqrt{x}$$

$$2\sqrt{x} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{2}{3}u\sqrt{u} \longleftrightarrow u'\sqrt{u}$$

$$\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} \longleftrightarrow 2x\sqrt{x^2+1}$$

$$2\sqrt{u} \longleftrightarrow \frac{u'}{\sqrt{u}}$$

$$2\sqrt{x^2+1} \longleftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{u^{n+1}}{n+1} \longleftrightarrow u'u^n$$

$$\frac{(x^2+1)^8}{8} \longleftrightarrow 2x(x^2+1)^7$$

$$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} \longleftrightarrow \frac{u'}{u^n}$$

$$-\frac{1}{6(x^2+1)^6} \longleftrightarrow \frac{2x}{(x^2+1)^7}$$

$$u \circ v(x) \longleftrightarrow v' \times u'(v(x))$$

$$\sin(\ln x) \longleftrightarrow \frac{1}{x}\cos(\ln x)$$

$x\ln x - x \longleftrightarrow \ln x$

$e^{x} \longleftrightarrow e^{x}$

$\frac{1}{a} e^{ax+b} \longleftrightarrow e^{ax+b}$, $a \neq 0$

$\frac{1}{2} e^{2x-1} \longleftrightarrow e^{2x-1}$

$\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} \longleftrightarrow \frac{\ln^n x}{x}$

$\ln(\ln x) \longleftrightarrow \frac{1}{x\ln x}$

$\frac{(\ln x)^2}{2} \longleftrightarrow \frac{\ln x}{x}$

$\frac{\ln^4 x}{4} \longleftrightarrow \frac{\ln^3 x}{x}$

- Si f est **continue** sur **un intervalle I**.
  alors f admet une primitive F sur I.

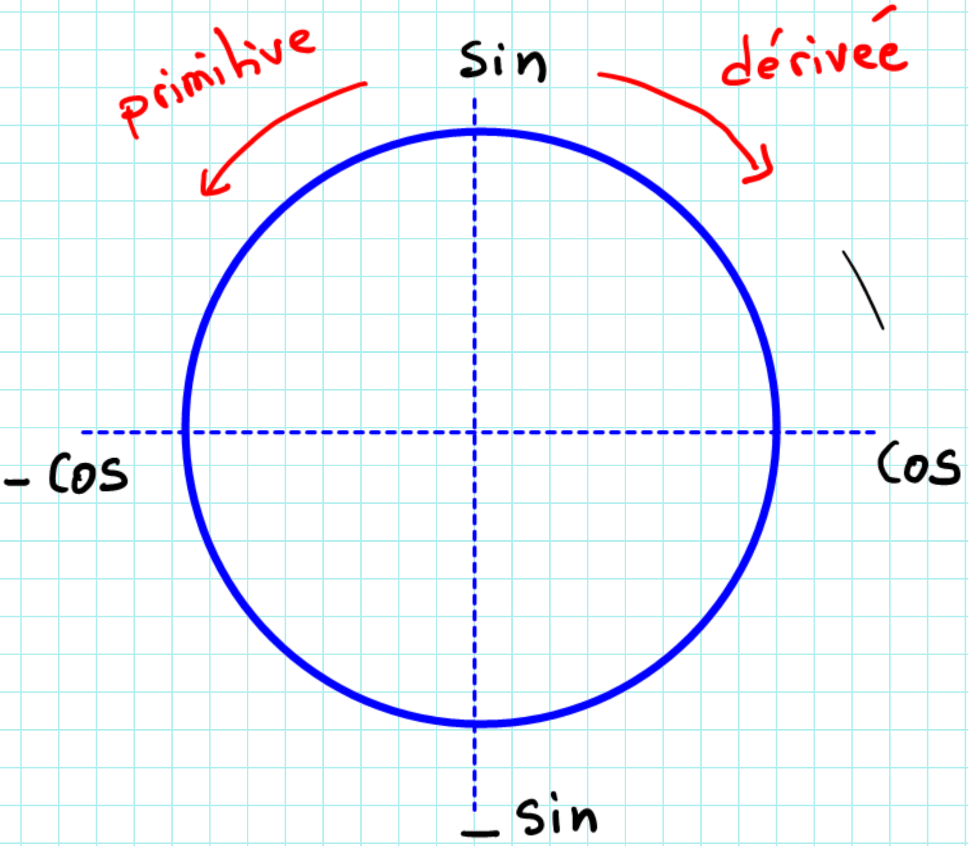
- F est une primitive de f sur I.
  sig F est **dérivable sur I** et $\forall x \in I$.

  $$F'(x) = f(x)$$

- F est **la primitive** de f sur I tel que
  $F(a) = b$.

Academy
- www.takiacademy.com -

Trigonometrie.



$$\frac{1}{a}\sin(ax+b) \longleftrightarrow \cos(ax+b)$$

$$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) \longleftrightarrow \sin(ax+b)$$

$-\ln|\cos x| \longleftrightarrow$ $\tan x \longleftrightarrow 1+\tan^2 x$

Academy
- www.takiacademy.com -

Integral

- Calcul d'aire
- Calcul volume
- Calcul valeur moyenne.

□ $\int_a^b f(t)\,dt$ c'est **l'aire algebrique** de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisse et les droites d'equations $x=a$ et $x=b$ $(a>b)$

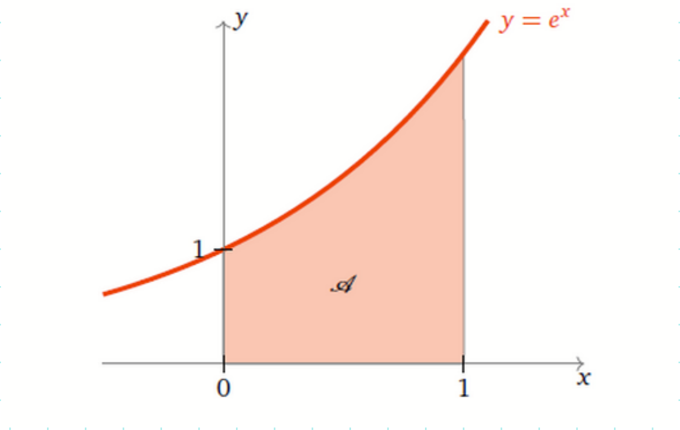
Exemples

□ $\mathcal{A} = \int_0^1 e^x \, dx$.

(primitive)

$= \left[e^x \right]_0^1$

$= e^1 - e^0 = \boxed{e-1}$



□ $\int_1^e \ln x \, dx = \left[x\ln x - x \right]_1^e = (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1)$
$= 0 - (-1) = \boxed{1}$

www.takiacademy.com

- $\displaystyle\int_1^2 x^2-3x+1\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x\right]_1^2$

  $= \frac{8}{3} - \frac{3}{2}\times 4 + 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1\right)$

  $= -\frac{7}{6}$

- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{2}\sin 0$

  $= 0 - 0 = 0$

- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}\,dx = \left[\frac{\ln^5 x}{5}\right]_1^e = \frac{\ln^5 e}{5} - \frac{\ln^5 1}{5}$

  $= \frac{1}{5} - 0$

  $= \frac{1}{5}$

Propriétés. f et g continue sur $[a,b]$

- $\forall x \in [a,b]$; $f(x) \geqslant 0$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.
- $\forall x \in [a,b]$; $f(x) \leqslant 0$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$.
- $\forall x \in [a,b]$; $f(x) \leqslant g(x)$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$
- $\forall x \in [a,b]$; $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Parité - Periodicité

f est continue sur $[a,b]$

- f est paire sur $[-a,a]$; on a : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
- f est impaire sur $[-a,a]$; on a $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
- si f est continue sur $\mathbb{R}$ et periodique de période T alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$.

Exemples

- $I = \int_{-5}^{5} x^3 + x\,dx$

$= 0$ car :

$f : x \longmapsto x^3 + x$ est une fonction impaire car.

$\forall x \in \mathbb{R}$; $-x \in \mathbb{R}$ et

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x$

$= -(x^3 + x)$

$= -f(x)$

- $J = \int_{-1}^{1} t^4 + t^2 - 1\,dt$, on a $g : t \longrightarrow t^4 + t^2 - 1$ est paire

car $\forall t \in \mathbb{R}$, $(-t) \in \mathbb{R}$.

$g(-t) = (-t)^4 + (-t)^2 - 1$

$= t^4 + t^2 - 1 = g(t)$

$= \int_{0}^{1} t^4 + t^2 - 1\,dt$.

- $K = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos 2x \, dx$

$x \longmapsto \cos 2x$ est continue sur IR et periodique de période $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\pi} \cos 2x \, dx.$

$= \int_{0}^{\pi} \cos 2x \, dx$

Theorème la moyènne

Si f est continue sur $[a,b]$, alors il existe un réel $c \in [a,b]$ telque $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$

- le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Exemple Soit $f(x) = x^2 - 1$.

Determiner la valeur moyenne de f sur $[1,2]$

$\overline{f} = \frac{1}{2-1}\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x^2 - 1\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2$

$= \frac{2^3}{3} - 2 - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right)$

Academy - www.takiacademy.com -

$= \frac{8}{3} - 2 + \frac{2}{3}$

$= \frac{10}{3} - 2$

$= \boxed{\frac{4}{3}}$

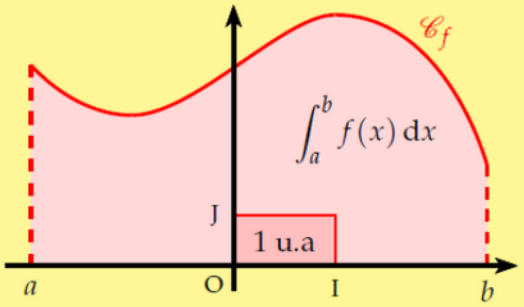
Calcul d'aire

Définition 1 : Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a\,;b]$.

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

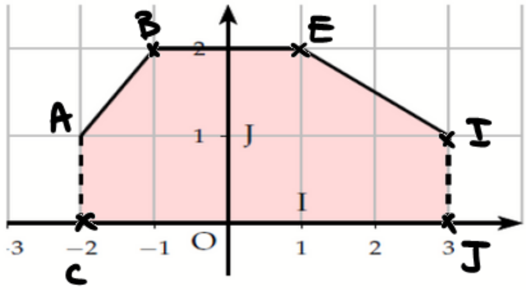
On appelle

- **Unité d'aire (u.a.)** : l'aire du rectangle bâti à partir des points O, I et J.
- **Domaine sous la courbe** : domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ $(a \leqslant b)$.
  Ce domaine est l'ensemble des point $M(x;y)$ du plan tels que :
  $$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$
- **Intégrale de f sur [a ;b]** : la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$.
  On la note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$



Exemple : On donne la représentation suivante d'une fonction f sur $[-2\,;3]$ ainsi que les mesures : OI = 2 cm et OJ = 3 cm. Calculer :

- L'unité d'aire.
- $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ puis l'aire en cm²



- L'unité d'aire : $\boxed{2 \times 3 = 6\ cm^2}$
- $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx\ (ua) = \mathcal{A}(AIJC) + \mathcal{A}(AIEB)$
  $= 5 \times 1 + \frac{(AI + BE) \times 1}{2}$

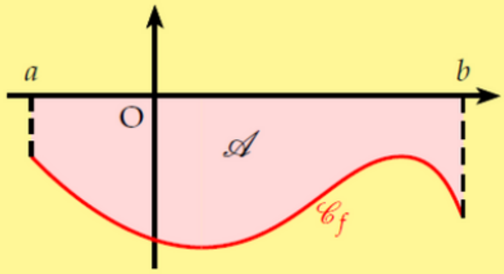
$= 5 + \frac{5+2}{2} = 10\ (\text{U a})$

$= 10 \times 6\ \text{cm}^2 = 60\ \text{Cm}^2$

Propriété 1 : Relation entre aire et intégrale

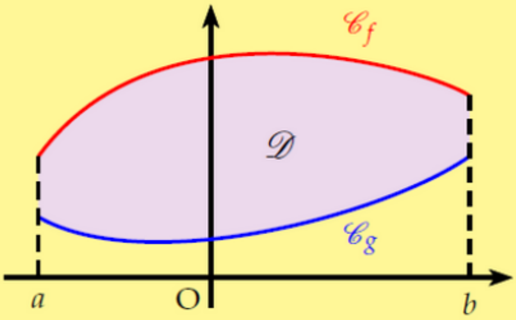
- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ telle que $f \leqslant 0$. Soit $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. On a alors :

$$\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

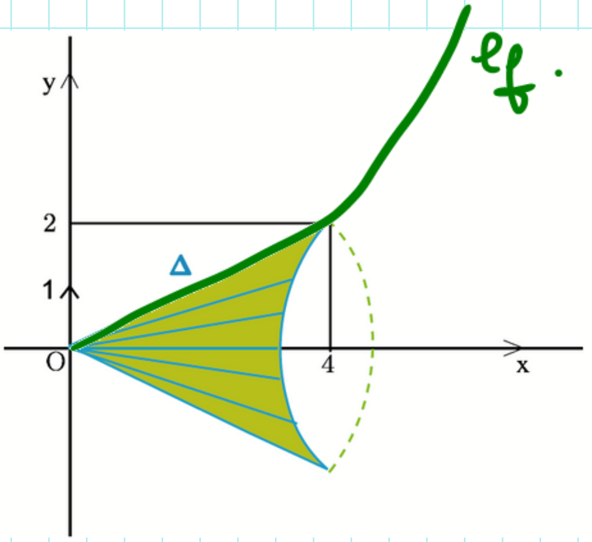


- Soient deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$ telles que $f \geqslant g$. Soit $\mathscr{D}$ l'aire comprise entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$. On a alors :

$$\mathscr{D} = \int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$$



Volume



$V = \pi \int_0^4 f^2(x)\,dx$

Théorème admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ ($a < b$) et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. On considère la partie $\mathscr{P}$ du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b.

Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la partie $\mathscr{P}$ autour de l'axe des abscisses. Alors on a : $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$ (unité de volume)

Integration par partie.

P : polynôme

$\int \underbrace{P}_{u} \cdot \underbrace{\text{trigo}}_{v'}$ ou $\int \underbrace{P}_{v'} \cdot \underbrace{\ln}_{u}$ ou $\int \underbrace{P}_{u} \cdot \underbrace{\exp}_{v'}$.

Exemples

$$I = \int_1^e x \ln x \, dx.$$

posons $u(x) = \ln x$; $u'(x) = \frac{1}{x}$.

$v'(x) = x$; $v(x) = \frac{x^2}{2}$

$$I = \left[u(x) \cdot v(x) \right]_1^e - \int_1^e u'(x) v(x) \, dx.$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx.$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} \ln e - \frac{e^2}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2 + 1}{4}}$$

Nombres Complexes

$i^2 = -1$

Nombres Complexes

$(1+i)^2 = 2i$

$(1-i)^2 = -2i$

* Fome algebrique

- $z = a + ib$ avec $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$

Conjugué d'un nombre complexe.

- $z = 1+3i \longrightarrow \overline{z} = 1-3i$
- $z = -5i \longrightarrow \overline{z} = 5i$
- $z_1 = i - z \longrightarrow \overline{z_1} = -i - \overline{z}$
- $z_2 = 1 - i z^2 \longrightarrow \overline{z_2} = 1 + i \overline{z}^2$
- $z + \overline{z} = 2Re(z) = 2x$; $z - \overline{z} = 2i\, Im(z) = 2iy$

$$z\overline{z} = Re^2(z) + Im^2(z) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

- $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z^2} = (\overline{z})^2$

Academy
- www.takiacademy.com -

Repère Complexe.

□ $M_1 = S_{(O,\vec{u})}(M)$

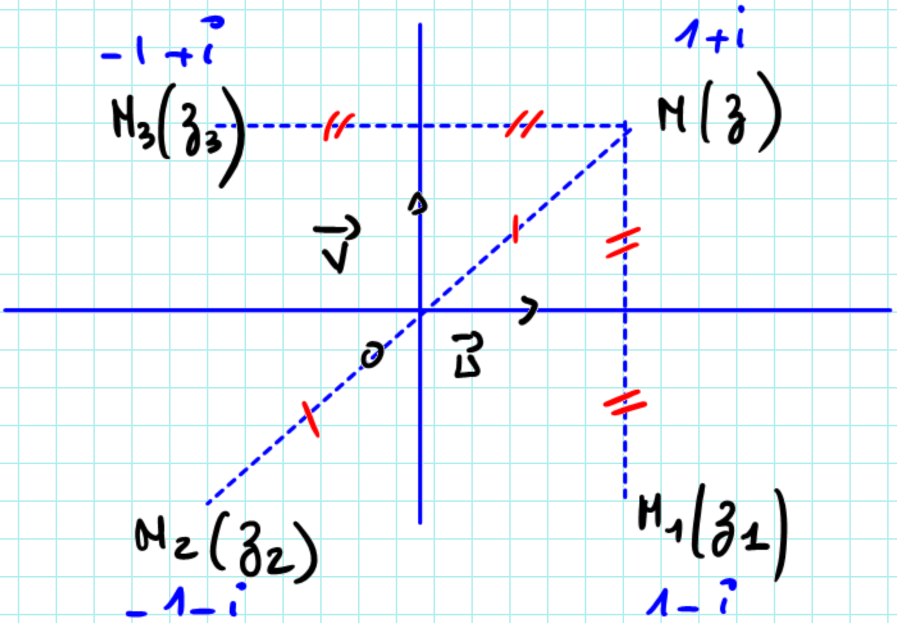
$\Rightarrow \boxed{z_1 = \overline{z}}$

□ $M_2 = S_O(M)$

$\Rightarrow \boxed{z_2 = -z}$

□ $M_3 = S_{(O,\vec{v})}(M)$

$\Rightarrow \boxed{z_3 = -\overline{z}}$



□ $z_A = 2+3i \longrightarrow A(2,3)$

□ $z_M = x+iy \longrightarrow M(x,y)$

□ $\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$; $\boxed{z_M = z_{\overrightarrow{OM}}}$.

□ ABCD est un plg $\Longleftrightarrow$ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$.
(A, B et C non alignés)

ou

$A * C = B * D$

$\Updownarrow$

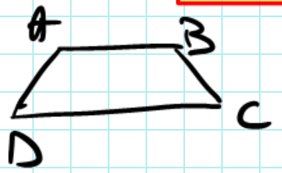
$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

- ABCD est un losange $\Leftrightarrow$ plg + $AB = AD$

- ABCD est un rectangle $\Leftrightarrow$ plg + $\dfrac{z_{\vec{AB}}}{z_{\vec{AB}}} \in i\mathbb{R}$

- ABCD est un Carré $\Leftrightarrow$ plg + $AB = AD$ + $\dfrac{z_{\vec{AB}}}{z_{\vec{AB}}} \in i\mathbb{R}$

- ABCD est un trapèze

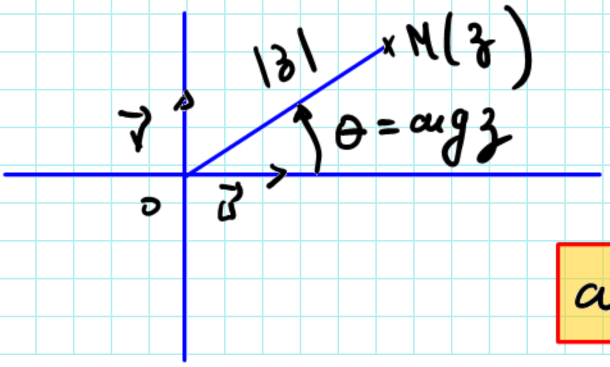


$$\Rightarrow \frac{z_{\vec{AB}}}{z_{\vec{DC}}} \in \mathbb{R}$$

Forme trigo – Forme expo

- $z = \underbrace{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{F. Trigo}} = \underbrace{|z|\, e^{i\theta}}_{\text{F. expo}}$ $\qquad z = x + iy$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$: module de z ; $\theta \equiv \arg z \; [2\pi]$



$|z| = OM$

$(\vec{u}, \vec{OM}) \equiv \arg z \; [2\pi]$

$\arg(z_{\vec{AB}}) \equiv (\vec{u}, \vec{AB}) \; [2\pi]$

$$\arg\left(\frac{z_{\vec{AB}}}{z_{\vec{CD}}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{CD}, \vec{AB}}\right)[2\pi].$$

module

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n.$
- $z\bar{z} = |z|^2 \neq z^2$

argument.

- $\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg z' - \arg z [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n \arg z [2\pi]$
- $\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$

$\underset{\alpha \in \mathbb{R}_+^*}{\arg(i\alpha)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$; $\underset{\alpha \in \mathbb{R}_-^*}{\arg(i\alpha)} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

$\underset{\alpha \in \mathbb{R}_+^*}{\arg(\alpha)} \equiv 0 [2\pi]$; $\underset{\alpha \in \mathbb{R}_-^*}{\arg(\alpha)} \equiv \pi [2\pi]$

$\arg(2017) \equiv 0 [2\pi]$; $\arg(-2016) \equiv \pi [2\pi]$

$\arg(5i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$; $\arg(-2i) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

- $\arg(1-i\sqrt{3}) \equiv \theta\ [2\pi]$

$|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{Re(1-i\sqrt{3})}{|1-i\sqrt{3}|} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{Im(1-i\sqrt{3})}{|1-i\sqrt{3}|} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \theta = -\frac{\pi}{3}.$$

Donc $\boxed{\arg(1-i\sqrt{3}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].}$

$$\boxed{\underbrace{1-i\sqrt{3}}_{F.\,Alg} = \underbrace{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}_{F.\ Trig} = \underbrace{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}_{F\ expo}.}$$

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $\boxed{|e^{i\theta}| = 1}$, $\boxed{\arg e^{i\theta} \equiv \theta\ [2\pi]}$
- $\arg(-e^{i\theta}) \equiv \arg(-1) + \arg(e^{i\theta})\ [2\pi]$

$\equiv \pi + \theta\ [2\pi].$

- $\arg(2e^{i\theta/2}) \equiv \theta/2\ [2\pi].$
- $\arg(2i\,e^{i\theta}) \equiv \frac{\pi}{2} + \theta\ [2\pi]$
- $\arg(-2i\,e^{i\theta}) \equiv -\frac{\pi}{2} + \theta\ [2\pi]$

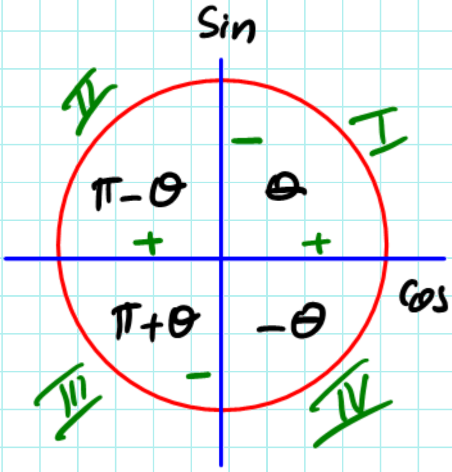
- $\arg\left(2i + e^{i\theta}\right) = \,?\ [2\pi]$.

I
- $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

IV
- $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$

II
- $-\cos\theta + i\sin\theta = e^{i(\pi-\theta)}$

III
- $-\cos\theta - i\sin\theta = e^{i(\pi+\theta)}$



- $\arg\left(-\cos\theta + i\sin\theta\right) = \pi - \theta\ [2\pi]$

- $\sin\theta + i\cos\theta = i\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$

$$= e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

$e^{i0} = 1$

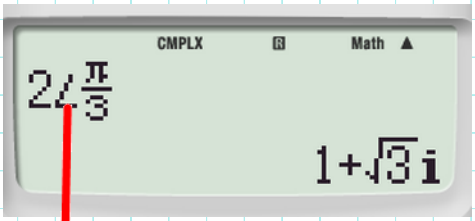
$e^{i\pi} = -1$

$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

$\dfrac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i(\theta'-\theta)}$

$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

$2e^{i\frac{\pi}{3}} =$



SHIFT (−)

Formule d'Euler.

- $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$
- $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$
- $-2i\sin\theta = e^{-i\theta} - e^{i\theta}$

- $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.
- $1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = -2i\sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$

Equation du 2^{em} degré

$$E : az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

- Si a, b et c $\in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$ alors E admet 2 solutions conjuguées
- Si E admet 2 solutions distincts z' et z'' on a :

- $z' + z'' = -\frac{b}{a}$ ⟶ si $b = 0$: E admet 2 solutions opposées.
- $z' \times z'' = \frac{c}{a}$ ⟶ si $a = c$: E admet 2 solutions inverses.

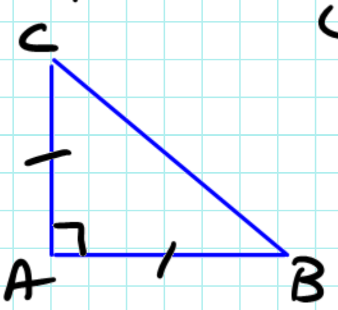
$\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$ **OU** $\Delta' = b'^2 - ac = \delta'^2$ $\quad b' = \dfrac{b}{2}$

$$z' = \frac{-b-\delta}{2a} \qquad\qquad z' = \frac{-b'-\delta'}{a}$$

$$z'' = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad\qquad z'' = \frac{-b'+\delta'}{a}.$$

Remauque impntante dans la pratique.

- Mq ABC est un triangle rectangle isocèle en A



$$\frac{z_{\vec{AB}}}{z_{\vec{AC}}} = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i.$$

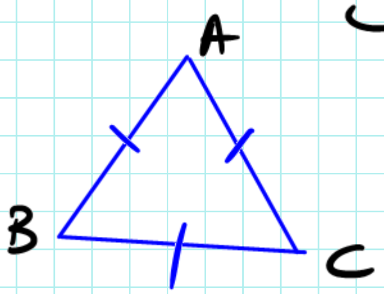
En effet. $\dfrac{z_{\vec{AB}}}{z_{\vec{AC}}} \in i\mathbb{R}$ donc $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ (1)

$$\left|\frac{z_{\vec{AB}}}{z_{\vec{AC}}}\right| = |\pm i| \iff \frac{AB}{AC} = 1 \iff AB = AC \ (2)$$

(1) et (2) $\Longrightarrow$ ABC est rectangle isocèle en A

www.takiacademy.com

Mq ABC est un triangle équilatéral



$$\frac{z_{\vec{AB}}}{z_{\vec{AC}}} = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

En effet : $\left|\frac{z_{\vec{AB}}}{z_{\vec{AC}}}\right| = 1 \Rightarrow \frac{AB}{AC} = 1$

$\Rightarrow$ $AB = AC$ (1)

$$\arg\left(\frac{z_{\vec{AB}}}{z_{\vec{AC}}}\right) \equiv \arg(z_{\vec{AB}}) - \arg(z_{\vec{AC}}) \ [2\pi]$$

$$\equiv (\widehat{\vec{u}, \vec{AB}}) - (\widehat{\vec{u}, \vec{AC}}) \ [2\pi].$$

$$\equiv (\vec{AC}, \vec{u}) + (\widehat{\vec{u}, \vec{AB}}) \ [2\pi]$$

$$\equiv (\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}}) \ [2\pi].$$

$$\equiv \pm\frac{\pi}{3} \ [2\pi]. \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ ABC est équilatéral

$E : az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \quad (a \neq 0)$

Si z_0 solution de E . alors

$$az^3 + bz^2 + cz + d = (z - z_0)(az^2 + \alpha z + \beta)$$

α et β à determiner.

$$E : (z - z_0)(az^2 + \alpha z + \beta) = 0.$$

Sig $z - z_0 = 0$ ou $az^2 + \alpha z + \beta = 0$

$$z^n = re^{i\theta}.$$

$$\Leftrightarrow z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

avec $0 \leq k \leq n-1$

Equation Différentielle

Academy
- www.takiacademy.com -

Equations différentielles

- Résolution de l'équation
- Calcul intégrale
- lecture graphique

Résolution de l'équation

① $E : y' = ay$ $(a \in \mathbb{R})$

* L'ensemble des solutions de E est les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto ce^{ax}$ $(c \in \mathbb{R})$

② $E : y' = ay + b$ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

* L'ensemble des solutions de E est les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ $(c \in \mathbb{R})$

③ $E : y'' + w^2 y = 0$ $(w \in \mathbb{R}^*)$

* L'ensemble des solutions de E est les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$x \longmapsto A\cos wx + B\sin wx$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

Exemples

① $E : y' + 3y = 0$

$\Leftrightarrow y' = -3y$ $\quad a = -3$

* L'ensemble des solutions de E est les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto Ce^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$

② $E : y' - 2y - 3 = 0$

$\Leftrightarrow y' = 2y + 3$ $\quad a = 2$ et $b = 3$

* L'ensemble des solutions de E est les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto Ce^{2x} - \frac{3}{2}$, $C \in \mathbb{R}$

3 $E : y'' = -9y$

$\Leftrightarrow y'' + 3^2 y = 0$ $\quad$ **$\omega = 3$**

* L'ensemble des solutions de E est les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \longmapsto A\cos 3x + B\sin 3x \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

4 $E : y' + y = e^{-x}$

a) Verifier que $g : x \longmapsto (x-1)e^{-x}$ est solution de E

$\forall x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = e^{-x} - (x-1)e^{-x}$

$= (2-x)e^{-x}$

$g'(x) + g(x) = (2-x)e^{-x} + (x-1)e^{-x}$.

$= (2-x+x-1)e^{-x} = e^{-x}$

Donc g est solution de E

b) Soit $E' : y' + y = 0$, Resoudre E'.

$\Leftrightarrow y' = -y$.

www.takiacademy.com

* L'ensemble des solutions de E' est les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto c e^{-x}$, $c \in \mathbb{R}$

c) Montrer que f solution de E ssi f-g solution de E'

$(f-g)$ solution de E' ssi $(f-g)' + f - g = 0$

ssi $f'(x) - g'(x) + f(x) - g(x) = 0$

ssi $f'(x) + f(x) = g'(x) + g(x)$

$= e^{-x}$

ssi f solution de E.

d) Résoudre alors E.

$(f-g)$ solution de E' ssi $f(x) - g(x) = c e^{-x}$ $(c \in \mathbb{R})$

ssi $f(x) = c e^{-x} + g(x)$

ssi $f(x) = c e^{-x} + (x-1) e^{-x}$ $(c \in \mathbb{R})$

www.takiacademy.com

* L'ensemble des solutions de E est les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto C e^{-x} + (x-1)e^{-x}$$

Calcul intégrale

Exemple. $E : y' + y = e^{-x}$.

$g : x \mapsto (x-1)e^{-x}$ est solution de E.

Calculer $\int_0^1 g(x)\, dx$.

Rép On a $g'(x) + g(x) = e^{-x} \Leftrightarrow g(x) = e^{-x} - g'(x)$

d'où $\int_0^1 g(x)\, dx = \int_0^1 e^{-x} - g'(x)\, dx$.

$$= \left[-e^{-x} - g(x)\right]_0^1$$

$$= -e^{-1} - g(1) + 1 + g(0)$$

$$= -e^{-1} + 1 - 1 = -\frac{1}{e}$$

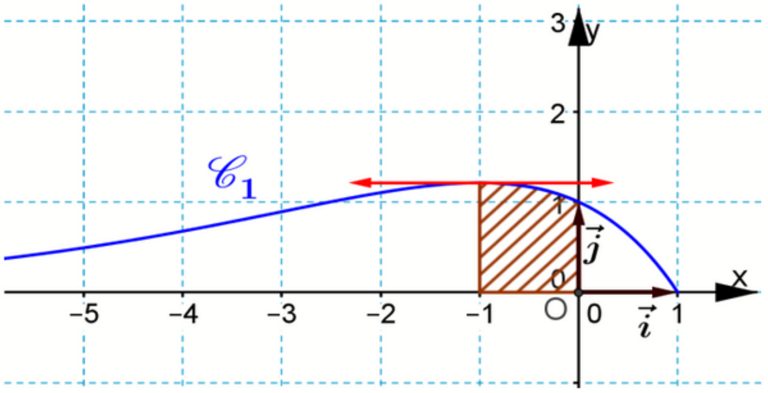
Academy
- www.takiacademy.com -

Lecture graphique

I- Dans le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}_1$ d'une fonction f_1 définie, continue, dérivable sur $]-\infty,1]$.

On sait que :

- la courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $-\infty$,
- la courbe (C) atteint son maximum au point d'abscisse -1.
- f_1 solution de l'équation différentielle $(IE): y'-\frac{1}{2}y=-e^{\frac{x}{2}}$.



1°) Par lecture graphique déterminer $f'_1(-1)$, $f_1(1)$, $f_1(0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)$.

2°) Montrer que $f_1(-1)=\frac{2}{\sqrt{e}}$.

3°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré.

1°) $f'_1(-1) = \boxed{0}$; $f_1(1) = \boxed{0}$; $f_1(0) = \boxed{1}$; $\lim\limits_{-\infty} f_1 = \boxed{0}$

2°) On a $f'_1(-1) - \frac{1}{2} f_1(-1) = -e^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} f_1(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$

$\Leftrightarrow \boxed{f_1(-1) = \frac{2}{\sqrt{e}}}$

3°) $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} f_1(x)\,dx$ or $f'_1(x) - \frac{1}{2} f_1(x) = -e^{\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow f_1(x) = 2f'_1(x) + 2e^{\frac{x}{2}}$

$= \int_{-1}^{0} 2f'_1(x) + 2e^{\frac{x}{2}}\,dx$

$= \left[2f_1(x) + 4e^{\frac{x}{2}}\right]_{-1}^{0}$ $\boxed{\frac{1}{a}e^{ax} \longleftrightarrow e^{ax}}$

$= 2f_1(0) + 4 - 2f_1(-1) - 4e^{-\frac{1}{2}}$

$= 6 - \frac{4}{\sqrt{e}} - \frac{4}{\sqrt{e}} = \boxed{6 - \frac{8}{\sqrt{e}}}$

Etude de fonction

Academy
- www.takiacademy.com -

Etude de fonction

* Continuité

Q : Mq f est continue en a.

R : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Q : Mq f est continue sur I.

R

P : polynôme
Q : Rationnelle

$x \mapsto P(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto Q(x)$ est continue sur D_Q.

- $x \mapsto f(x)$ est continue sur I

alors $x \mapsto |f(x)|$ " "

- $x \mapsto f(x)$ est continue et positive sur I.

alors $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ " sur I.

Dérivabilité

- $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ éq de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a.
- $T_a \parallel \Delta : y = \alpha x + \beta$. $\Rightarrow f'(a) = \alpha$

$T_a \perp \Delta : y = \alpha x + \beta$. $\Rightarrow f'(a) \times \alpha = -1$.

lecture graphique

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\begin{cases}+\infty \\ -\infty \\ f'(a)=\begin{cases}0\\ \oplus \\ \ominus\end{cases}\end{cases}$$

$+\infty$, $-\infty$: non dérivable

$f'(a)=0$, $\oplus$, $\ominus$: dérivable.

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\begin{cases}+\infty \\ -\infty.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\begin{cases}-\infty \\ +\infty.\end{cases}$$

Approximation affine.

$$f(a+h)\simeq f(a)+h\times f'(a)$$

(h : voisin de zéro)

Exemple : Donner une valeur approchée de

$$f(1,999)=f(2-0,001)$$
$$\simeq f(2)-0,001\times f'(2)$$

Sens de variation

si $f'(x)=\begin{cases}+ \\ - \\ 0\end{cases}$: $f\nearrow$; $f\searrow$; f constante.

fonctions dérivées

$(ck)'=0$; $(x)'=1$; $(2x)'=2$; $(-3x)'=-3$. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

$(x^2)'=2x$; $(x^3)'=3x^2$; $(x^4)'=4x^3$, $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$(3x^3-2x^2+x-1)' = 9x^2-4x+1$$

$$(u+v)' = u'+v' \quad , \quad (uv)' = u'v+v'u$$

$$(x^2+\sqrt{x})' = 2x+\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x\sqrt{x})' = 1\times\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2} \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)' = \frac{1(2x-3)-2(x+1)}{(2x-3)^2}$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$(\sqrt{x^2-3x})' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$$

Branches infinies.

Q : Mq $\Delta : y=ax+b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au $V(\pm\infty)$

R $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-y = \dots\dots = 0$

ou

Q : Mq $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique que l'on précisera.

R₁ : Si $f(x) = ax+b+g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$

Donc $\Delta : y=ax+b$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au $V(\pm\infty)$

Re Si $f(x) \neq ax+b+g(x)$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots\dots = a$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-ax = \dots\dots = b$.

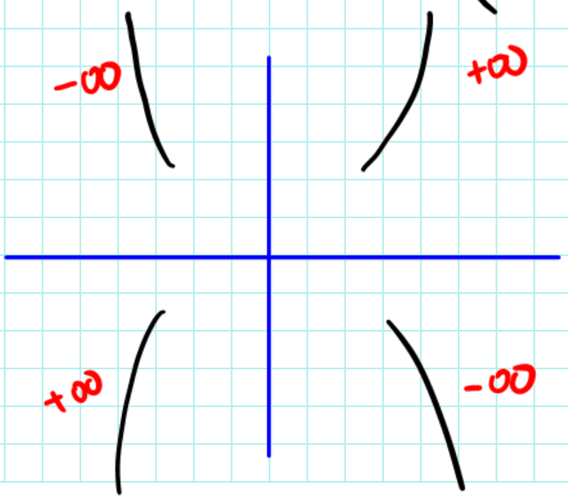
Donc $\Delta : y = ax+b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au $V(\pm\infty)$

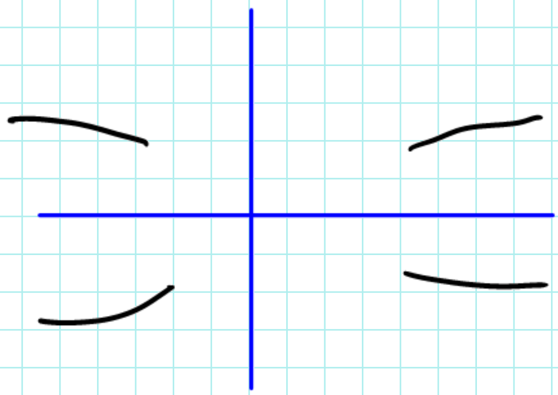
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au $V(\pm\infty)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ la droite d'équation $x = x_0$ asymptote à $\mathcal{C}_f$

Branche parabolique. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

On calcule

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 0 \longrightarrow \text{B.P de direction } (O,\vec{i}) \\ \left.\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}\right\} \text{ " " } (O,\vec{j}) \end{cases}$$





Axe de symétrie $x = a$

Q : Mq la droite $\Delta : x = a$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$

R $\forall x \in D_f \Rightarrow \begin{cases} \square\ 2a - x \in D_f. \\ \square\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

si $a = 0$ donc f est paire.

Centre de symétrie $\Omega(a,b)$

Q : Mq le point $\Omega(a,b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$

R $\forall x \in D_f \Rightarrow \begin{cases} \square\ 2a - x \in D_f \\ \square\ f(2a-x) + f(x) = 2b. \end{cases}$

si $a = b = 0$ donc f est impaire.

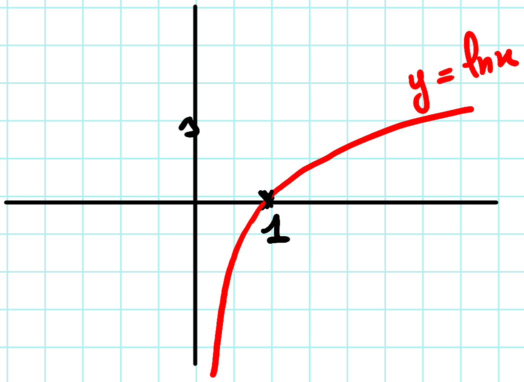
Q : Mq $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$ au $V(\pm\infty)$.

R $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$

Fonction Logarithmique

Fonction ln

Déf



$f(x) = \ln x \quad ; \quad D_f =]0, +\infty[$

x	0		$+\infty$
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

Rq $(\ln 0{,}3)\, x \geq 5.$

$x \leq \dfrac{5}{\ln 0{,}3}$

car $\ln 0{,}3 < 0$

Propriétés

$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$

$e \simeq 2{,}71$

$a, b \in \mathbb{R}_+^*$

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b \longrightarrow \ln(2e) = \ln 2 + \ln e = 1 + \ln 2$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \longrightarrow \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \longrightarrow \ln\left(\frac{2}{e}\right) = \ln 2 - 1$
- $\ln a^n = n \ln a \longrightarrow \ln(\sqrt{2}) = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 2$

Equation - Inéquation

$a, b \in \mathbb{R}_+^*$

$\ln a = \ln b \iff a = b$

$\ln a \geq \ln b \iff a \geq b.$

$\ln e^a = a$

$\ln x = a = \ln e^a$

$\iff x = e^a.$

Signe $(a\ln x + b)$

Exemple : signe $(-2\ln x + 3)$

$-2\ln x + 3 \geq 0 \iff -2\ln x \geq -3$

$\iff \ln x \leq \frac{3}{2}$

$\iff x \leq e^{\frac{3}{2}}$.

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$-2\ln x+3$	‖	$+$	0	$-$	

Dérivée _ primitive

$P \longleftrightarrow D$

$f \leftrightarrow f' \leftrightarrow f''$

$x\ln x - x \longleftrightarrow \ln x \longleftrightarrow \frac{1}{x}$

$\ln|u| \longleftrightarrow \frac{u'}{u}$

$\ln 2x \longleftrightarrow \frac{1}{x}$

$\ln(-x) \longleftrightarrow \frac{1}{x}$

$\ln ax \longleftrightarrow \frac{1}{x}$.

$\ln(x^2-3x+1) \longleftrightarrow \frac{2x-3}{x^2-3x+1}$.

$(uv)' = u'v + v'u$.

$(x\ln x)' = 1.\ln x + \frac{1}{x} \times x$

$= \ln x + 1$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}.x - 1.\ln x}{x^2}$

$= \frac{1-\ln x}{x^2}$

$(u^2)' = 2u'u$

$\left((\ln x)^2\right)' = 2 \times \frac{1}{x}.\ln x$

$= \frac{2\ln x}{x}$.

limites

F.I $\frac{\infty}{\infty}$; $0\times\infty$; $+\infty-\infty$; $\frac{0}{0}$.

$\frac{\text{Reel}}{\infty}=0$

$\frac{\text{Reel}}{0}=\infty$ (Regle de signe)

$\frac{\infty}{0}=\infty$

$\frac{0}{\infty}=0$

Depart
- $\ln U \xrightarrow{U\to+\infty} = +\infty$
- $\ln U \xrightarrow{U\to 0^+} = -\infty$

F.I
- $\frac{\ln^m U}{U^n} \xrightarrow{U\to+\infty} = 0$ $\quad m,n\in\mathbb{N}^*$
- $U^n \ln^m U \xrightarrow{U\to 0^+} = 0$
- $\frac{\ln U}{U-1} \xrightarrow{U\to 1} = 1$

Sup $r\in\mathbb{Q}_+^*$: $\frac{\ln U}{U^r} \xrightarrow{U\to+\infty} = 0$; $U^r \ln U \xrightarrow{U\to 0^+} = 0$

Technique pour lever l'indétermination
- Factorisation (le plus fort en facteur)
- Développement.
- Dérivée $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\right)$

Exemples

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

($x\to+\infty$, $-\ln x\to-\infty$; $x\to+\infty$, $\frac{\ln x}{x}\to 0$)

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ($1+\frac{1}{x}\to 1$)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}+1\right)-1}=1$

$\frac{\ln U}{U-1} \xrightarrow{U\to 1} = 1$

3°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}$.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^3\ln\left(\frac{1}{x}\right)=\boxed{0}$ ($\frac{1}{x}\to 0^+$)

$U^n \ln^m U \xrightarrow{U\to 0^+} = 0$

4°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x^2}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}}$

($\ln x \to +\infty$, $\dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}} \to 0$; $\dfrac{1}{x^2} \to 0$, $\sqrt{x} \to +\infty$, $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x}} \to 0$)

$= \boxed{0}$

5°) $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\,\ln^3 x = \lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{1}{2}} \ln^3 x$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \left(x^{\frac{1}{6}} \ln x\right)^3$

($x^{\frac{1}{6}} \ln x \to 0^+$; $\to 0$)

$= \boxed{0}$

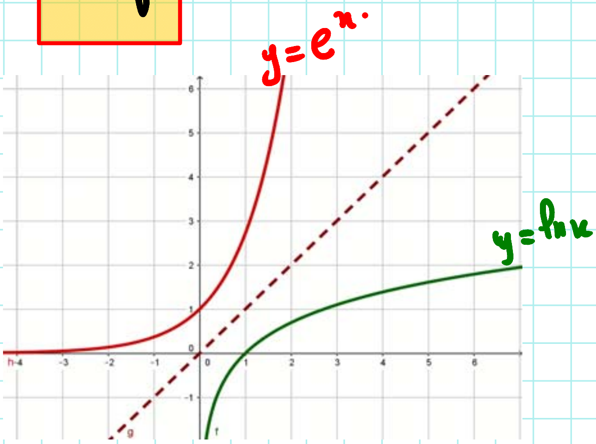
6°) $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\ln x-(x-1)}{(x-1)^2} = \ ?$ (Hors programme)

Fonction Exponentielle

Fonction exponentielle

Déf

$f(x) = e^x$, $D_f = \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$



x	$-\infty$		$+\infty$
e^x	0	↗	$+\infty$

Signe $(ae^{u(x)} + b)$:

⊕ + ⊕ = ⊕
⊖ + ⊖ = ⊖
⊕ + ⊖ } ?
⊖ + ⊕ } ?

- $e^x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $-e^{-2x} - 1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $e^{-2x} - 2$?

$e^{-2x} - 2 \geq 0 \iff e^{-2x} \geq 2 \iff -2x \geq \ln 2$

$\iff x \leq -\frac{\ln 2}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$e^{-2x} - 2$		$+$	0	$-$	

- $e^{2x} + 3e^x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $e^{2x} + 2e^x - 3$?

$e^{2x} + 2e^x - 3 = (e^x)^2 + 2e^x - 3 = 0$

on pose $t = e^x \Rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$

$t = 1$ ou $t = -3$

Donc $t^2+2t-3 = (t-1)(t+3)$

Ainsi $e^{2x}+2e^{x}-3 = (e^{x}-1)(e^{x}+3)$

Donc le signe de $e^{2x}+2e^{x}-3$ est celui $e^{x}-1$.

$e^{x}-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{x} \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{2x}+2e^{x}-3$		$-$	0	$+$	

Primitive $\longleftrightarrow$ Dérivée

$e^{x} \longleftrightarrow e^{x}$.

$\frac{1}{a}e^{ax+b} \longleftrightarrow e^{ax+b} \longleftrightarrow a\,e^{ax+b} \quad (a\neq 0)$

$-2\,e^{-\frac{1}{2}x} \longleftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} \longleftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$.

$e^{u} \longleftrightarrow u'e^{u}$

Integration par partie.

Généralement.

P: polynome

$\int \overset{u}{P}.\overset{v'}{\cos}$ ou $\int \overset{u}{P}\,\overset{v'}{\sin}$ ou $\int \overset{v'}{P}.\overset{u}{\ln}$ ou $\int \overset{u}{P}.\overset{v'}{\exp}$.

$(uv)' = u'v+v'u$

$(xe^{x})' = 1.e^{x}+e^{x}.x$

$= e^{x}(1+x)$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$

$\left(\frac{e^{x}}{x}\right)' = \frac{e^{x}.x-1.e^{x}}{x^2}$

$= \frac{e^{x}(x-1)}{x^2}$

$(u^{n})' = n\,u'u^{n-1}$

$\left((x+e^{x})^2\right)' = 2\times(1+e^{x})(x+e^{x})$

Academy
- www.takiacademy.com -

Propriétés

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$

$e^0 = 1$, $e^1 = e \simeq 2{,}7$

$e^x \cdot e^{-x} = 1$

- $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$
- $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $(e^a)^n = e^{an}$

limites

F.I $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$

$\dfrac{\text{Reel}}{\infty} = 0$; $\dfrac{\infty}{0} = \infty$; $\dfrac{\text{Reel}}{0} = \infty$, $\dfrac{0}{\infty} = 0$

Départ

- $e^{U \to +\infty} = +\infty$
- $e^{U \to -\infty} = 0$

F.I

- $\dfrac{e^{nU \to +\infty}}{U^m} = +\infty$
- $U^m e^{nU \to -\infty} = 0$
- $\dfrac{e^{U \to 0} - 1}{U} = 1$

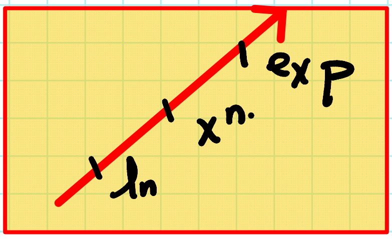
$n, m \in \mathbb{N}^*$

Sup : $r \in \mathbb{Q}_+^*$

$\dfrac{e^{U \to +\infty}}{U^r} = +\infty$

Technique pour lever l'indetermination

- → Factorisation (le plus fort en facteur
- → Dévèlopement
- → Dérivée $\left(\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$



Exemples

$+\infty - \infty$ (F.I) (le plus fort en facteur)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^x(1+e^{-x})\right) - x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln e^x + \ln(1+e^{-x}) - x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln(1+e^{-x}) - x$ ($e^{-x} \to 0$)

$= \boxed{0}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x - e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = \boxed{-\infty}$ ($x \to +\infty$, $1-\frac{e^x}{x} \to -\infty$)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \boxed{+\infty}$ $\boxed{\frac{e^u}{u} \underset{u\to+\infty}{=} +\infty}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \boxed{+\infty}$ ($\sqrt{x}\to 0$; $\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} \to 1$; $\frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$)

- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2} = ?$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

or exp est dérivable sur IR en particulier en 2.

$$\boxed{\lim\limits_{x\to 2} \frac{\exp(x)-\exp(2)}{x-2} = \exp'(2) = e^2.}$$

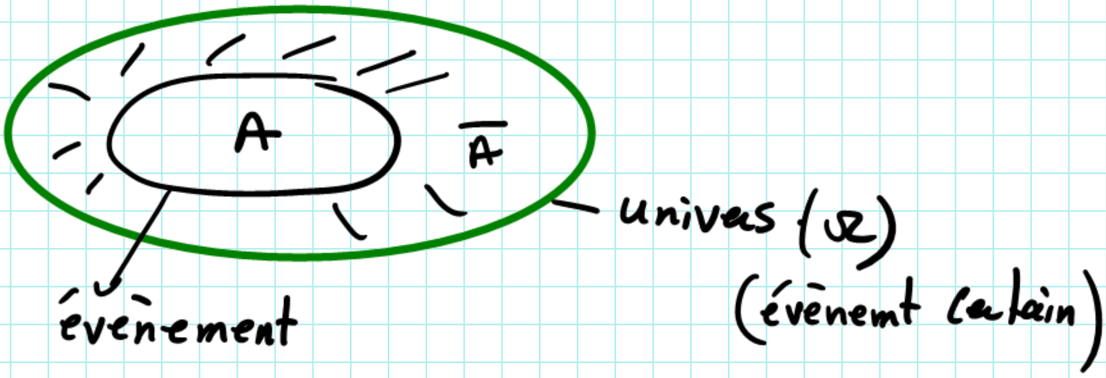
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2\sqrt{x}}}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^6} \times 2^6 = +\infty$ ($2\sqrt{x} \to +\infty$)

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-(e^x-1)}{x(e^x-1)} = ?$ **Hors programme**

Probabilité

Academy
- www.takiacademy.com -

Probabilité Conditionnelle

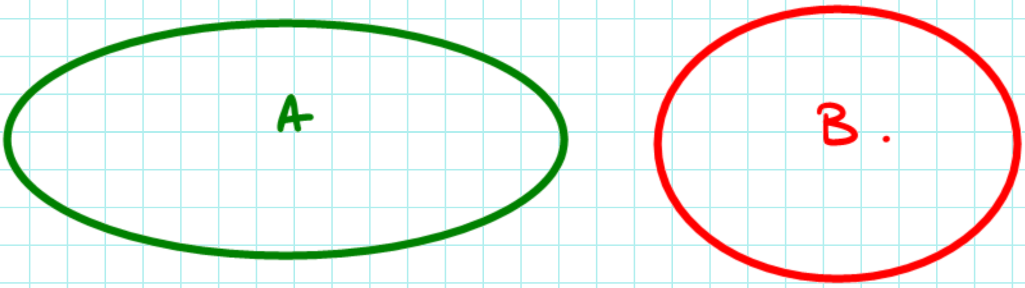


$p(\Omega) = 1$ $\qquad$ $p(A) + p(\bar{A}) = 1.$

$\Rightarrow$ $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

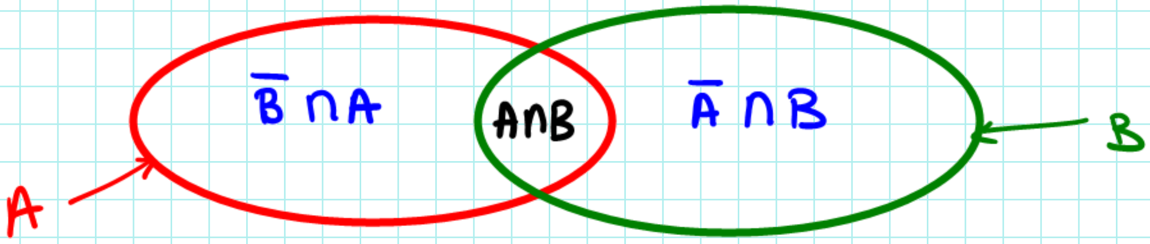
Tirage
- simultanément : (C_n^p) L'ordre n'intervient pas.
- successivement avec remise (n^p)
- successivement sans remise (A_n^p)

(avec remise / sans remise : L'ordre intervient)



A et B deux évènements incompatibles. $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$p(A \cap B) = 0$



$$p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B)$$

$$p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$$

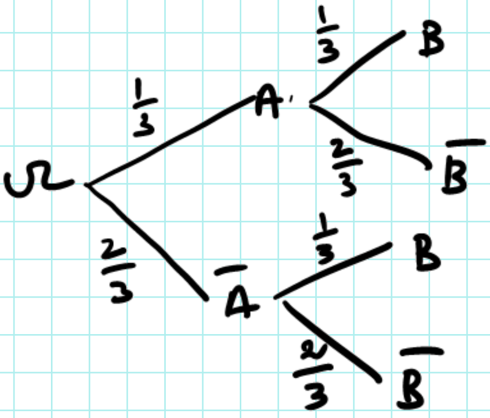
$$p(A \cup B) = p(A \cap \overline{B}) + p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$$

$$= p(A) - p(A \cap B) + p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B)$$

Donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

A et B sont independantes $\Leftrightarrow$ $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$



- $p(A) = \boxed{\frac{1}{3}}$
- $p(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{9}}$
- $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$p(A) \times p(B) = \frac{1}{9} = p(A \cap B)$

Donc A et B sont independants.

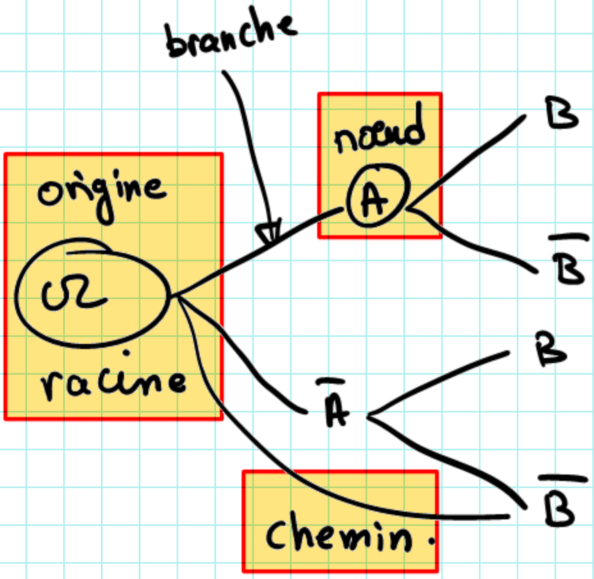
$p(B/A) = p(B)$

Academy
- www.takiacademy.com -

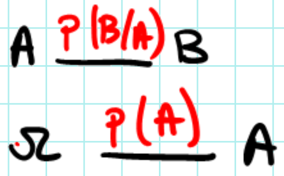
$A \cap B = B \cap A$ $\quad$ $A \cup B = B \cup A$ $\quad$ $A/B \neq B/A.$

$$p(\overline{A}/B) = 1 - p(A/B)$$

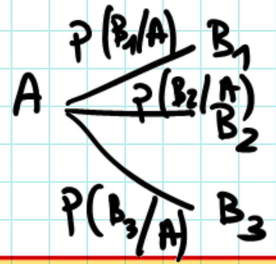
$$p(A/\overline{B}) = \frac{p(A \cap \overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{1 - p(B)} \text{ ou } \frac{p(\overline{B}/A) \times p(A)}{1 - p(B)}.$$



R_1

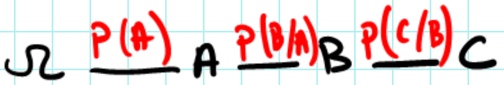


R_2



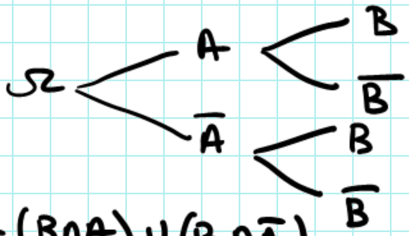
$$p(B_1/A) + p(B_2/A) + p(B_3/A) = 1.$$

Probabilité Composée ← **R_3**



$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p(B/A) \times p(C/B)$$

Probabilité totale $\quad$ **R_4**



$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$p(A \cap B) = p(A/B) \times p(B) = p(B/A) \times p(A)$$

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = p(B/A) \times p(A) + p(B/\overline{A}) \times p(\overline{A})$$

Academy
- www.takiacademy.com -

Variables aléatoires

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Q. Détermine la loi de probabilité de X.

R

$p(X = x_1) = p_1$

$p(X = x_2) = p_2$

$p(X = x_3) = p_3$

X	x_1	x_2	x_3	Total
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	$p_1+p_2+p_3 = 1$

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

$E(X)$ → **espérance mathématique**

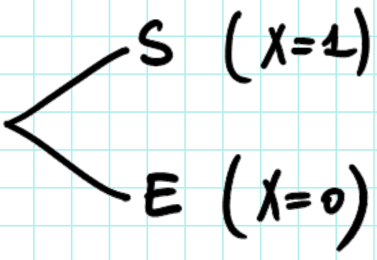
$$V(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 - E^2(X)$$

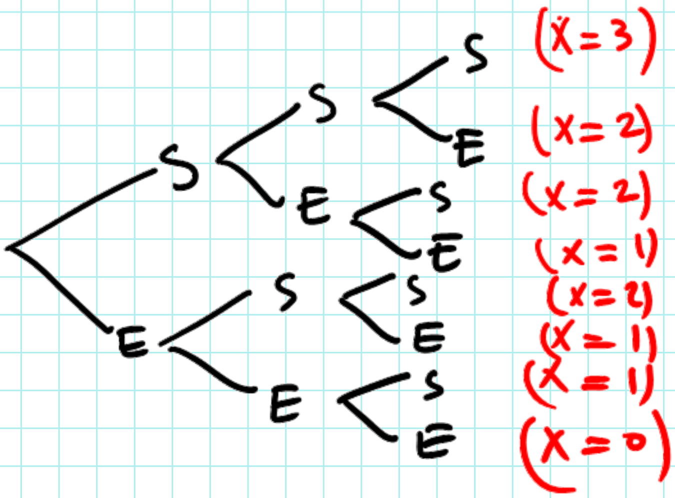
$V(X)$ → **Variance**

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$\sigma(X)$ → **écart-type**

loi Binomiale.





X suit une loi binomiale de paramètre n : nombre répétition et p : probabilité d'un succé.

$$p(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}.$$

k : nombre du succés

$k \in \{0, 1, 2, \dots n\}$.

Exemple X suit $\mathcal{B}(n=3 ; p=\frac{1}{6})$

$$p(X=k) = C_3^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$E(X) = n \times p$

$V(X) = n \times p(1-p)$

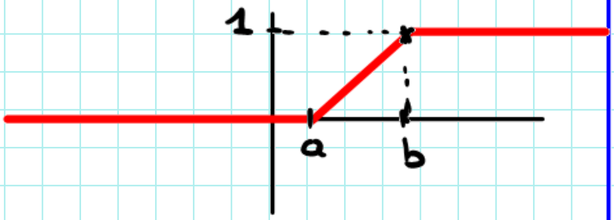
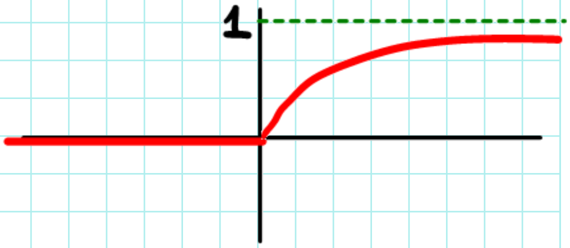
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Academy
- www.takiacademy.com -

Lois Continues

- Dans le cas d'une variable **X discrète**, une loi de probabilité est entièrement définie l'ensemble des couples $(k, p(X=k))$

- Dans le cas d'une variable aléatoire **X continue**, une loi de probabilité est définie. l'ensemble des valeurs $(x, p(X>x))$ (x Réel)

	loi uniforme $[a,b]$	loi exponentielle $[0,+\infty[$
Fonction de densité	$f(x) = \frac{1}{b-a}$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$: paramètre
Fonction de répartition	$F(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$ 	$F(x) = p(X \leq x) = \int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-\lambda x}$ 
Espérance	$E(x) = \frac{a+b}{2}$	$E(x) = \frac{1}{\lambda}$
Variance	$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$	$V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$

	loi uniforme $[a,b]$	loi exponentielle $[0,+\infty[$
Probabilité de Cetains évènements	$[c,d]\subset[a,b]$ $p(c<x<d)=\frac{d-c}{b-a}$ $p(x>c)=\frac{b-c}{b-a}$ $p(x<c)=\frac{c-a}{b-a}$	$[c,d]\subset[0,+\infty[$ $p(c<x<d)=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$ $p(x<c)=1-e^{-\lambda c}$ $p(x>c)=e^{-\lambda c}$

$$p(x\leq c)=p(x<c)$$

Suites réelles

Suites Réelles

Forme explicite

$U_n = f(n)$

Exemple

- $U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \ln(n+1)$

$U_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ln(4)$

$= \frac{1}{27} + 2\ln 2$

$U_{100} = \left(\frac{1}{3}\right)^{100} + \ln(101)$

Suite récurrente

$$\begin{cases} U_0 \text{ donné} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

Exemple :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = U_n e^{1-U_n} \end{cases}$$

$U_1 = U_0 e^{1-U_0}$

$= \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e}$

- $U_2 = U_1 e^{1-U_1}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{e}\ e^{1-\frac{1}{2}\sqrt{e}}$

Suite intégrale

- $I_n = \int_a^b f_n(x)\,dx$
- $I_n = \int_a^n f(x)\,dx$

Exemple.

- $I_n = \int_1^2 n x^2\,dx$

$= \left[n \frac{x^3}{3}\right]_1^2$

$= \frac{8}{3}n - \frac{1}{3}n$

$= \frac{7}{3}n.$

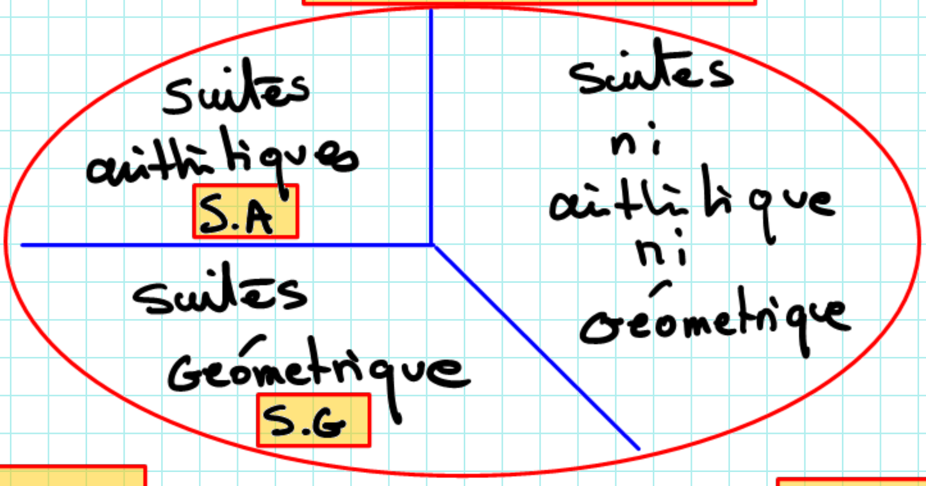
- $I_n = \int_1^n x\,dx$

$I_n = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^n$

$= \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}$

Academy
- www.takiacademy.com -

Suites Réelles



S.A

Mq (V_n) est une S.A

R

- $V_{n+1} = \dots$ (simplification)
- $V_{n+1} - V_n = \dots = $ Constante $= r$ (raison)

Exemple : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{1+U_n} \end{cases}$

et $V_n = \dfrac{1+U_n}{-1+U_n}$

Mq (V_n) est un S.A.

R

$$V_{n+1} = \frac{1+U_{n+1}}{-1+U_{n+1}} = \frac{1+3-\frac{4}{1+U_n}}{-1+3-\frac{4}{1+U_n}}$$

S.G

Mq (V_n) est une S.G.

R

- $V_{n+1} = \dots = c^{te} \cdot V_n = q \cdot V_n$ → q (raison)

Exemple : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{1+U_n} \end{cases}$

et $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n}$

Mq (V_n) est S.G.

R

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 3}{U_{n+1}} = \frac{\frac{4U_n}{1+U_n} - 3}{\frac{4U_n}{1+U_n}} \times \frac{1+U_n}{1+U_n}$$

$$= \frac{4U_n - 3 - 3U_n}{4U_n}$$

$$= \frac{4 - \frac{4}{1+U_n}}{2 - \frac{4}{1+U_n}} \times \frac{1+U_n}{1+U_n}$$

$$= \frac{4 + 4U_n - 4}{2 + 2U_n - 4}$$

$$= \frac{4U_n}{-2+2U_n}$$

$$= \frac{4U_n}{2(-1+U_n)} = \boxed{\frac{2U_n}{U_n - 1}}$$

□ $V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n}{U_n - 1} - \frac{1+U_n}{-1+U_n}$

$$= \frac{2U_n - 1 - U_n}{U_n - 1}$$

$$= \frac{U_n - 1}{U_n - 1} = \boxed{1}$$

Donc (V_n) est une S.A de raison $\boxed{r = 1}$

□ **Exprimer V_n en fonction de n**

□ $V_n = \boxed{V_0 + n \times r}$

$= \boxed{V_1 + (n-1) \times r}$

$= \boxed{V_m + (n-m) \times r}$

Exemples

□ $r = -2 \quad V_0 = 3$

$V_n = \boxed{V_0 + nr} = \boxed{3 - 2n}$

$$= \frac{U_n - 3}{4U_n}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{U_n - 3}{U_n}\right)$$

$$= \frac{1}{4} V_n$$

Donc (V_n) est un S.G de raison $q = \frac{1}{4}$

□ **Exprimer V_n en fonction de n**

□ $V_n = \boxed{V_0 \times q^n}$

$= \boxed{V_1 \times q^{n-1}}$

$= \boxed{V_m \times q^{n-m}}$

Exemples

□ $q = -2 \quad V_0 = -5$

$V_n = V_0 \times q^n = \boxed{-5 \times (-2)^n}$

□ $q = -3 \quad V_1 = 2$

$V_n = V_1 \times q^{n-1} = 2 \times (-3)^{n-1}$

$= 2 \times (-3)^n \times (-3)^{-1}$

$= \boxed{-\frac{2}{3}(-3)^n}$

- $r = -\sqrt{2}$, $V_1 = -1$

$$V_n = V_1 + (n-1) \times r$$
$$= -1 - \sqrt{2}(n-1)$$
$$= -1 - \sqrt{2}n + \sqrt{2}$$
$$= \boxed{\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}n}.$$

Somme d'une suite (Σ)

- $\sum_{k=1}^{3} U_k = U_1 + U_2 + U_3$

Σ cte $=$ NT $\times$ cte.

- $\sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

PT : premier terme

PI : premier indice

DT : dernier terme

DI : dernier indice

NT : nombre de terme

NT = DI − PI + 1

Somme d'une S.A.

$$\frac{NT}{2}(PT + DT)$$

Exemple.

$$\overset{+3}{2 + 5} \overset{+3}{+ 8} \overset{+3}{+ 11} = \frac{4}{2}(2 + 11) = \boxed{26}$$

Somme d'une S.G

$$PT \times \frac{1 - q^{NT}}{1 - q}$$

Exemple.

$$\overset{\times 4}{2 + 8} \overset{\times 4}{+ 32} = 2 \times \frac{1 - 4^3}{1 - 4}$$
$$= \boxed{42}$$

Suite ni SA ni SG

U_0 , U_1 , U_2

- $U_1 - U_0 = \dots$
  $U_2 - U_1 = \dots$
  $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ donc U n'est pas S.A.

- Si $U_0 \neq 0$

  $\frac{U_1}{U_0} = \dots$
  $\frac{U_2}{U_1} = \dots$
  $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ donc U n'est pas S.G

- Si $U_0 = 0$

  $\frac{U_0}{U_1} = 0$
  $\frac{U_1}{U_2} = \dots$
  $\frac{U_0}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_2}$ donc U n'est pas S.G

Suite majorée - Suite minorée.

- $U_n \leq M \Rightarrow (U_n)$ est majorée par M
- $U_n \geq m \Rightarrow (U_n)$ est minorée par m.
- $m \leq U_n \leq M \Rightarrow (U_n)$ est bornée.

Sens de variation d'une Suite

- $U_{n+1} - U_n = \begin{cases} \oplus \rightarrow (U_n) \nearrow \\ \ominus \rightarrow (U_n) \searrow \\ 0 \rightarrow (U_n) \text{ est cte} \Leftrightarrow U_n = U_{n+1} = U_0 \end{cases}$

limite d'une Suite

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \text{n'existe pas} \\ \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$

- $+\infty$, $-\infty$, n'existe pas : (U_n) est divergente (div)
- $\ell \in \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ (U_n) est convergente CV

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1<q<1 \\ +\infty & \text{si } q>1 \\ 1 & \text{si } q=1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q\leq -1 \end{cases}$$

Exemples

- $(U_n) = (-1)^n \longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ n'existe pas donc (U_n) est div
- $(U_n) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ car $-1<\frac{-1}{2}<1$ donc U_n C.V

Remarques trés importante dans la pratique

- (U_n) est $\nearrow$ et majorée par M
- (V_n) est $\searrow$ et minorée par m

donc (U_n) et (V_n) sont C.V.

- (U_n) est $\nearrow$ et non majorée $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
- (U_n) est $\searrow$ et non minorée $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

- $\forall n \in \mathbb{N}$; (U_n) est $\nearrow$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \geq U_0$
- $\forall n \in \mathbb{N}$; (U_n) est $\searrow$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \leq U_0$
- $\begin{cases} U_0 = \text{donné} \\ U_{n+1} = f(U_n) \\ a \leq U_n < b. \end{cases}$ et (U_n) C.V.

Q Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

R on pose $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha \in \mathbb{R}$ avec $a \leq \alpha \leq b$.

et $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f est Continue sur I en particulier en α.

Donc $f(\alpha) = \alpha$.

Exemple : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{1+U_n} \\ 0 < U_n < 3 \end{cases}$ (U_n) est C.V et $(U_n) \nearrow$

on pose $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$ avec $0 \leq \alpha \leq 3$

et $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \dfrac{4x}{1+x}$ où f est Continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en particulier en α

Donc $f(\alpha)=\alpha \iff \alpha = \dfrac{4\alpha}{1+\alpha}$

$\iff \alpha+\alpha^2 = 4\alpha$

$\iff \alpha^2 - 3\alpha = 0$

$\iff \alpha(\alpha-3) = 0$

$\iff \alpha = 0$ ou $\alpha = 3$

or (U_n) est ↗ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$

Principe de récurrence

- Pour $n=n_0$ vérification (Initialisation)
- Pour $n\in\mathbb{N}$, Supposons que $a<U_n<b$ et montrons que $a<U_{n+1}<b$ (hereditaire)
- Conclusion

Exemple.

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{1+U_n}. \end{cases}$$

- Montrer par recurrence, que $\forall n\in\mathbb{N}$; $0<U_n<3$
- Pour $n=0$; $0<U_0=1<3$ (vrai)

- Pour $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $0 < U_n < 3$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 3$.

- $U_{n+1} = \dfrac{4U_n}{1+U_n} > 0$ ($4U_n > 0$; $1+U_n > 0$)

$*$ $U_{n+1} - 3 = \dfrac{4U_n}{1+U_n} - 3 = \dfrac{4U_n - 3 - 3U_n}{1+U_n}$

$= \dfrac{U_n - 3}{1+U_n} < 0$ ($U_n - 3 < 0$; $1+U_n > 0$)

Donc $0 < U_{n+1} < 3$

- Donc par recurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n < 3$.

- $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n} = \ell \\ \lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n+1} = \ell \end{cases}$$

- Suites adjacentes

$\forall n$
- $U_n < V_n$
- (U_n) est $\nearrow$ et (V_n) est $\searrow$
- $\lim U_n - V_n = 0$

alors (U_n) et (V_n) sont adjacentes c.à.d (U_n) et (V_n) sont convergentes et $\lim V_n = \lim U_n$

Takiacademy.com © 2016

WWW.TAKIACADEMY.COM